

1 Ficha de Revisões

1.1 Conjuntos e Operações com conjunto.

1. Considera os seguintes conjuntos:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad B = \{4, 5, 6, 7, 8\}, \quad C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

definidos no universo

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}.$$

Representa na forma de conjunto:

- (a) $A \cap B$
- (b) $A \cup C$
- (c) $A \setminus B$
- (d) $B \cup C$
- (e) $C \setminus A$
- (f) $\overline{A}$
- (g) $\overline{B}$
- (h) $A \cap C$
- (i) $A \cup B$
- (j) $(A \cap B) \setminus C$

2. Considera os conjuntos $D = \{x, y\}$ e $E = \{1, 2, 3\}$.

2.1 Representa em extensão:

- (a) $D \times E$
- (b) $E \times D$

2.2 Indica um elemento de:

- (a) $D \times D \times E$
- (b) E^3

Métodos de Contagem

- 3. Lançam-se três moedas equilibradas (com as faces “cara” e “coroa”). Utiliza um diagrama em árvore para determinar todos os resultados possíveis. Qual é o número total de resultados?
- 4. Para a lancheira, a Marta pode escolher entre dois tipos de pão (de forma ou baguete), quatro recheios (queijo, fiambre, atum ou ovo) e três bebidas (sumo de laranja, água ou leite). De quantas formas diferentes pode a Marta fazer a sua lancheira, escolhendo um de cada tipo?
- 5. Numa turma de 30 alunos, 18 praticam natação e 15 praticam atletismo. Sabe-se que 5 alunos não praticam nenhum destes desportos.
 - (a) Quantos alunos praticam ambos os desportos?
 - (b) Quantos alunos praticam só natação?
 - (c) Quantos alunos praticam só atletismo?
 - (d) Representa a situação com um Diagrama de Venn.

6. De quantas maneiras diferentes se podem sentar 5 pessoas num banco com 5 lugares?
7. Considera os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5. Quantos números de 3 algarismos diferentes se podem formar?
8. Numa estante existem 4 livros de Matemática, 3 de Física e 2 de Química. De quantas formas se podem arrumar os livros se os da mesma disciplina tiverem de ficar juntos?
9. Um código de multibanco é composto por 4 algarismos. Quantos códigos diferentes existem?
10. A Ana tem de escolher um código para a sua mala de viagem. O código é composto por 3 letras seguidas de 2 algarismos. As letras podem ser repetidas, mas os algarismos não podem. Quantos códigos diferentes pode a Ana formar? (Considera 26 letras no alfabeto).

Probabilidades (Lei de Laplace)

11. Considera as letras da palavra **ESPECTACULAR**.
 - (a) Escolhendo uma letra ao acaso, determina a probabilidade de ser uma consoante. Apresenta o resultado na forma de fração irredutível.
 - (b) Escolhendo, sucessivamente e sem reposição, duas letras ao acaso, determina a probabilidade de saírem duas consoantes.
 - (c) Qual a probabilidade de escolher uma vogal, sabendo que a letra escolhida foi a letra A ou a letra E?
12. Lançam-se dois dados cúbicos com as faces numeradas de 1 a 6 e soma-se os pontos das faces que ficam viradas para cima.
 - (a) Qual a probabilidade de a soma ser 7?
 - (b) Qual a probabilidade de a soma ser um número primo?
 - (c) Qual a probabilidade de a soma ser maior que 10?
13. Uma caixa contém 5 bolas brancas e 7 bolas pretas. Tiram-se 3 bolas ao acaso.
 - (a) Qual a probabilidade de as 3 bolas serem brancas?
 - (b) Qual a probabilidade de sair pelo menos uma bola preta?
14. Numa turma de 25 alunos, 15 são rapazes e 10 são raparigas. Escolhe-se um aluno ao acaso para ser o delegado de turma. Qual a probabilidade de o aluno escolhido ser uma rapariga?
15. Numa sondagem, 60% das pessoas inquiridas preferem o chocolate preto, 40% o chocolate de leite e 15% preferem ambos. Qual a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso preferir chocolate preto ou de leite?
16. Uma moeda é lançada 100 vezes e o resultado é sempre “cara”. Se a moeda for lançada uma 101^a vez, qual a probabilidade de sair “coroa”? Justifica a tua resposta.

Desafios Matemáticos

17. A probabilidade de um avião despenhar-se num voo é de 0,001%. Um passageiro que faz 1000 voos conclui que é certo que o avião se vai despenhar pelo menos uma vez. Concordas com ele? Justifica.
18. O Zé gosta de praticar tiro ao alvo. A probabilidade de ele acertar no alvo é de 0,8 em cada disparo. Se ele fizer 3 disparos, qual a probabilidade de ele acertar no alvo em, pelo menos, um dos disparos?
19. Numa reunião, estão 15 pessoas e todas se cumprimentam com um aperto de mão. Quantos apertos de mão são trocados no total?
20. No Totoloto, para ganhar o primeiro prémio, é necessário acertar em 6 números, de um total de 49. Qual a probabilidade de acertar na chave do Totoloto com apenas um boletim?

Soluções

1. (a) $A \cap B = \{4, 5\}$
(b) $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$
(c) $A \setminus B = \{1, 2, 3\}$
(d) $B \cup C = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
(e) $C \setminus A = \{7, 9\}$
(f) $\overline{A} = U \setminus A = \{6, 7, 8, 9, 10\}$
(g) $\overline{B} = U \setminus B = \{1, 2, 3, 9, 10\}$
(h) $A \cap C = \{1, 3, 5\}$
(i) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
(j) $(A \cap B) \setminus C = \{4\}$
2. 2.1 (a) $D \times E = \{(x, 1), (x, 2), (x, 3), (y, 1), (y, 2), (y, 3)\}$
(b) $E \times D = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y), (3, x), (3, y)\}$
2.2 (a) Um exemplo em $D \times D \times E$: $(x, x, 1)$
(b) Um exemplo em E^3 : $(1, 1, 1)$
3. Três moedas: número total de resultados $= 2^3 = 8$.
4. Lancheira da Marta: $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$ formas.
5. Turma (30 alunos, 18 natação, 15 atletismo, 5 nenhum):
(a) Ambos os desportos: 8.
(b) Só natação: 10.
(c) Só atletismo: 7.
6. Disposição de 5 pessoas em 5 lugares: $5! = 120$.
7. Números de 3 algarismos distintos com dígitos $\{1, 2, 3, 4, 5\}$: $P(5, 3) = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.
8. Arranjo de livros (4M, 3F, 2Q) com blocos juntos: $3! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 2! = 1728$.
9. Código multibanco (4 algarismos): $10^4 = 10000$ códigos.
10. Código da Ana: $26^3 \cdot P(10, 2) = 26^3 \cdot 90 = 1\,581\,840$ códigos.
11. Palavra *ESPECTACULAR* (12 letras): consoantes = 7, vogais = 5.
11.1 Probabilidade consoante $= \frac{7}{12}$.
11.2 Duas consoantes sem reposição $= \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} = \frac{7}{22}$.
11.3 Probabilidade de vogal sabendo que é A ou E = 1.
12. Dois dados:
12.1 Soma 7: $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.
12.2 Soma primo: $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.
12.3 Soma > 10 : $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

13. Caixa com 5 brancas e 7 pretas, tiram-se 3:

13.1 3 brancas: $\frac{\binom{5}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{10}{220} = \frac{1}{22}$.

13.2 Pelo menos uma preta: $1 - \frac{1}{22} = \frac{21}{22}$.

14. Turma 25 (15 rapazes, 10 raparigas): probabilidade de rapariga = $\frac{10}{25} = \frac{2}{5}$.

15. Sondagem: $P(\text{preto ou leite}) = 0,60 + 0,40 - 0,15 = 0,85$.

16. Moeda lançada 100 vezes deu sempre cara — probabilidade no 101.^o lançamento (moeda equilibrada) de sair coroa = $\frac{1}{2}$.

17. Avião (prob. queda por voo = 0,001% = 0,00001). Em 1000 voos:

$$P(\text{pelo menos 1 queda}) = 1 - (1 - 0,00001)^{1000} \approx 0,00995 \text{ } (\approx 0,995\%).$$

Logo não é certo que ocorra — a probabilidade é aproximadamente 0,995%.

18. Tiro ao alvo ($p(\text{acerto})=0,8$), 3 disparos: $P(\text{pelo menos 1 acerto}) = 1 - (0,2)^3 = 1 - 0,008 = 0,992$.

19. Apertos de mão entre 15 pessoas: $\binom{15}{2} = 105$.

20. Totoloto (6 de 49): probabilidade de acertar os 6 com um boletim = $\frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13\,983\,816}$.